سلم تصحيح مقرر الطبولوجيا (1)
السنة الثانية - رياضيات
الدورة الإضافية للعام ٢٠١٦/٢٠١٧

السؤال الأول (٤٠ علامة): أ- التعاريف:

1) نقول عن المجموعة $\mathcal{V}$ إنها جوار للنقطة x في الفضاء المتري (X,d) إذا وجدت كرة مفتوحة $B(x,r)$ مركزها x ونصف قطرها $r>0$ بحيث $B(x,r)\subseteq\mathcal{V}$. 4

2) نقول عن النقطة x إنها نقطة حدية للمجموعة A في الفضاء المتري X إذا كان أي جوار لـ x يتقاطع مع A ومع متممتها $X\setminus A$. 4

3) نسمي الفضاء المتري فضاءً تاماً إذا كانت أي متتالية كوشي من عناصره متقاربة فيه. 4

4) نقول عن فضاء متري إنه متراص إذا كانت أي تغطية مفتوحة له تحتوي على تغطية جزئية منتهية. 4

ب- نقول إن المتتالية (x_n) تتقارب من النقطة x في الفضاء (X,d) إذا كان: $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0 : d(x_n,x)<\varepsilon,\ \forall n\geq n_0$ 4

تعريف ثاني: تتقارب المتتالية (x_n) من النقطة x إذا كان أي جوار للنقطة x يحوي جميع حدود المتتالية ابتداءً من حدٍّ ما. 4

جـ- 1) المجموعة $\mathbb{Q}$ ليست جواراً لأي نقطة من نقاطها لأنها لا تحوي مجالاً مفتوحاً مركزه أي نقطة فيها. 4

2) $\mathbb{Q}$ ليست متراصة لأنها ليست مغلقة (وليست محدودة). 4

3) المجموعة $\mathbb{Q}$ كثيفة لأن $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ (لصاقتها تساوي الفضاء) 4

4) الفضاء الجزئي $\mathbb{Q}$ غير تام لأن $\mathbb{Q}$ غير مغلقة. 4

السؤال الثاني (٢٠ علامة):

أ- $A^\circ=A$ 3 ؛ $\overline{A}=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ 3 ؛ $A'=\overline{A}$ 3

$Fr(A)=\overline{A}\setminus A^\circ=\{-1,1\}$ 3 ؛ $Ext(A)=\mathbb{R}\setminus\overline{A}=]-1,+1[$ 3

ب- التعليل: 1) A مفتوحة لأن $A=A^\circ$ 3

2) A غير مغلقة لأن $\overline{A}\neq A$ 3

3) A غير كثيفة لأن $\bar{A} \neq \mathbb{R}$ 3

4) A غير مترابطة لأنه اجتماع مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين وغير متقاطعتين هما $]1,+\infty[$ و $]-\infty,-1[$. 3

5) A غير محدبة لأن القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين 2 و -2 (على سبيل المثال) غير محتواة في A . 3

السؤال الثالث (٢٠ علامة):

أ- لدينا f مستمر. ولتكن ع مجموعة مغلقة في Y، ولنثبت أن $U=f^{-1}(ع)$ مغلقة في X. نأخذ نقطة لاصقة كيفية x من U. حسب مبرهنة، توجد متتالية (x_n) من عناصر U متقاربة من x. وبما أن f مستمر، فالمتتالية $(f(x_n))$ تتقارب من $f(x)$. وبالتالي، حسب المبرهنة، تكون $f(x)$ نقطة لاصقة بالمجموعة ع. وبما أن ع مغلقة فإن $f(x)$ تنتمي إلى ع، وهذا يؤدي إلى أن x تنتمي إلى U. أي أن U تحوي جميع نقاطها اللاصقة، وبالتالي فهي مغلقة. 5 5 5

ب- المبرهنة الثانية:

١- لزوم الشرط 5

٢- كفاية الشرط 10

د. طالب غرايبة

حمص في ٢٠١٧/٨/٢٢